Or: $fog(x)=\sqrt{tg(g(x))}=x \Rightarrow tg^2(g(x))=x^4$

Conclusion : $\boxed{g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}, \forall x \in [0,+\infty[}$

b) $f(0)=0$ donc $g(0)=0$

$g(1)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{tg\alpha}=1 \Leftrightarrow tg\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{g(1)=\frac{\pi}{4}}$

c) $\forall x \in]0,+\infty[$, *posons* : $F(x)=g(x)+g(\frac{1}{x})$

• $x \to u(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $u(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ et la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ ce qui prouve que $g(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par suite $F(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de deux fonction dérivables)

$$F'(x)=g'(x)+(g(\frac{1}{x}))'=g'(x)+(\frac{1}{x})'g'(\frac{1}{x})=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{1}{x^2}\times\frac{2}{x(\frac{x^4+1}{x^4})}$$

$$=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{x^3(\frac{x^4+1}{x^4})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2}{(\frac{x^4+1}{x})}=\frac{2x}{1+x^4}-\frac{2x}{1+x^4}=0$$

D'où $F'(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=k$ (constante)

Or $F(1)=g(1)+g(\frac{1}{1})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, g(x)+g(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}}$$

4) a) • $x \to \cos \pi x$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

Or: $\pi x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos \pi x \neq 0 \Rightarrow v(x)=\frac{1}{\cos \pi x}$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ et on a : $v'(x)=\frac{\pi \sin \pi x}{\cos^2 \pi x}$

• $x \in]-\frac{1}{2},0[\Rightarrow \sin \pi x \prec 0$

• $x \in]0,\frac{1}{2}[\Rightarrow \sin \pi x \succ 0$

Donc v est décroissante sur $]-\frac{1}{2},0[$ et elle est croissante sur $]0,\frac{1}{2}[$ par suite $v(]-\frac{1}{2},0[)=]1,+\infty[$ et $v(]0,\frac{1}{2}[)=]1,+\infty[$

Conclusion : $v(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)=]1,+\infty[$

Comme $]1,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et g est dérivable sur $]0,+\infty[$ il découle:

$g(\frac{1}{\cos \pi x})$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

• $\forall x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[: h'(x)=(\frac{1}{\cos \pi x})' g'(\frac{1}{\cos \pi x})$

$$h'(x)=\frac{\pi \sin \pi x}{\cos^2 \pi x}\times\frac{2\frac{1}{\cos \pi x}}{1+(\frac{1}{\cos \pi x})^4}=\frac{2\pi \cos \pi x.\sin \pi x}{1+\cos^4 \pi c}$$

Puisque sur, $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, $\cos \pi x \geq 0$ alors le signe de $h'(x)$ est celui de $\sin \pi x$ qui s'annule et change de signe en 0

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
$h'(x)$	‖	−	0	+	‖
$h(x)$	‖ $\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↗	‖ $\frac{\pi}{2}$

* $h(0)=g(\frac{1}{\cos 0})=g(1)=\frac{\pi}{4}$

* $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} \frac{1}{\cos \pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X \to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos X}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} h(x)=\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} g(\frac{1}{\cos \pi x})=\frac{\pi}{2}$

* $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{1}{\cos \pi x} \underset{X=\pi x}{=} \lim\limits_{X \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos X}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} h(x)=\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} g(\frac{1}{\cos \pi x})=\frac{\pi}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} h(x)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to (-\frac{1}{2})^+} h(x)=\frac{\pi}{2}$

Donc h est prolongeable par continuité et soit $H(x)$ le prolongement par continuité de h on a :

$$\begin{cases} H(x)=h(x) & x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\\ H(\frac{1}{2})=H(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice n° 22

a) $\forall x \in IR, (\cos x)'=-\sin x$ *et* $(\cos^2 x)'=-2\cos x.\sin x$

$\Rightarrow (-2\cos^2+2\cos x+1)'=4\sin x \cos -2\sin x$

donc $\boxed{f'(x)=2\sin x(2\cos x-1)}$

b) $2\sin x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \; ou \; \cos x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=0 \; ou \; x=\pi \; ou \; x=\frac{\pi}{3} \; dans [0;\pi]$

D'où $S_{[0,\pi]}=\{0,\pi,\frac{\pi}{3}\}$

Qarray.tn - Aqra Bledek - Qarray.tn